LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 7

Pojam funkcije dviju varijabla, grafa i parcijalnih derivacija

Lekcije iz Matematike 2.

7. Pojam funkcije dviju varijabla, grafa i parcijalnih derivacija.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuje pojam funkcije više varijabla, ponajviše dviju. Uvodi se pojam grafa funkcije dviju varijabla, daju neki primjeri i usporedjuje s grafom funkcije jedne varijable. Takodjer se, na osnovi pojma derivacije funkcije jedne varijable, uvodi pojam **parcijalne derivacije** funkcije dviju ili više varijabla.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

U matematici i u primjeni često se pojavljuju veličine koje ovise o više drugih (nezavisnih) veličina, a ne samo o jednoj. Na primjer, u gemetriji, obujam valjka ovisi i o polumjeru osnovke i o visini, u termodinamici tlak plina ovisi i o obujmu i o temperaturi i sl. Takve se veze opisuju funkcijama s dvjema ili više varijabla, a njihove geometrijske predožbe su grafovi funkcija. Brzina promjene neke veličine u odnosu na promjenu veličina o kojoj ona ovisi opisuje se parcijalnim derivacijama.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam funkcije jedne varijable, njena grafa, derivacije (i derivacija višeg reda). Za predočavanje grafa funkcije dviju varijabla treba poznavati koordinatni sustav u prostoru.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Funkcije dviju varijabla - zadavanje.

Ako neka veličina z zavisi o dvjema nezavisnim veličinama x, y, onda je pravilo f te zavisnosti funkcija dviju varijabla. Tu funkcijsku zavisnost pišemo kao

$$z = f(x, y)$$

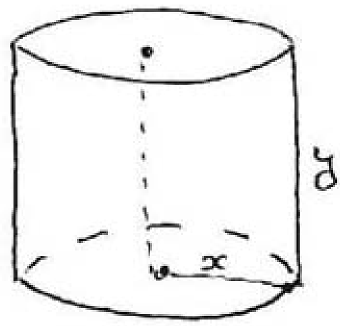
Kažemo da je f funkcija dviju varijabla. **Područje definicije (domena)** D te funkcije je skup svih uredjenih parova (a, b) gdje a ide skupom vrijednosti koje postiže veličina x i b ide skupom vrijednosti koje postiže y. Dakle D je podskup koordinatne ravnine, tj. $D \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. To pišemo i kao:

$$f : D \to \mathbf{R}$$

odnosno kao: $(x, y) \mapsto f(x, y)$.

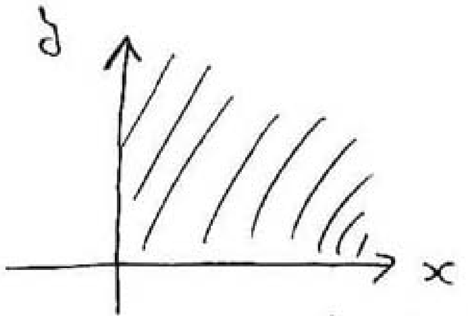
Primjer 1. - neke funkcije dviju varijabla i njihove domene.
(i) Ako je x polumjer osnovke valjka (sl.1.), y visina i z obujam valjka, onda su te tri veličine povezane vezom

$$z = \pi x^2 y$$



Sl.1 $V = \pi \cdot x^2 y$

Tu je
$f(x, y) := \pi x^2 y$.
$D(f) =$ prvi kvadrant (sl.2.),
jer x, y mogu biti bilo koji pozitivni realni brojevi.

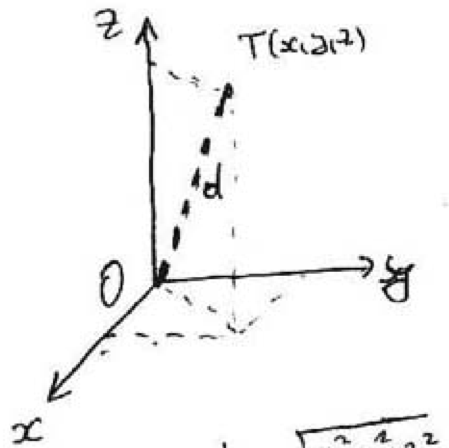


Sl.2. Prvi kvadrant

Na primjer, $f(2, 3) = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$, što znači da valjak polumjera osnovke 2 i visine 3 ima obujam 12π.
Inače, u tu funkciju možemo uvrstiti bilo koji uredjeni par realnih brojeva, samo što oni onda nemaju geometrijsko značenje, naime nema valjaka s negativnima polumjerom ili visinom. To je česta pojava kod zapisivanja odnosa medju veličinama u inženjerstvu. Naime te veličine imaju svoja fizikalna značenja koja utječu na suženje realnih vrijednosti varijabla, tj. na suženje matimatičke, maksimalne domene. Za funkcije zadane analitički, tj. zapisane formulom, ta se maksimalna domena zove **prirodna domena**.
(ii) Ako su x, y, z koordinate u prostoru, onda je funkcija f koja mjeri udaljenost točke od ishodišta zadana formulom:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

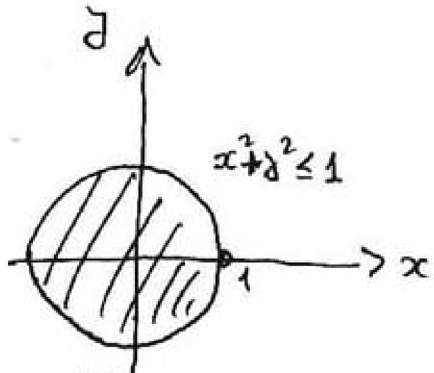
To je funkcija triju varijabla definirana na cijelom prostoru (sl.3.).



Sl.3. $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

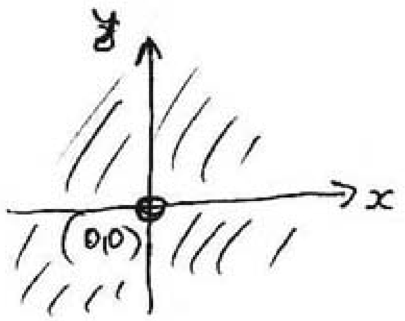
Primjer 2. - odredjivanje prirodne domene. Odredimo prirodnu domenu funkcije
(i) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$
(ii) $f(x,y):=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(i) Tu treba biti $1-x^2-y^2\geq 0$, tj. $x^2+y^2\leq 1$, što je krug polumjera 1 sa središtem u ishodištu (sl.4.).



Sl.4. Krug

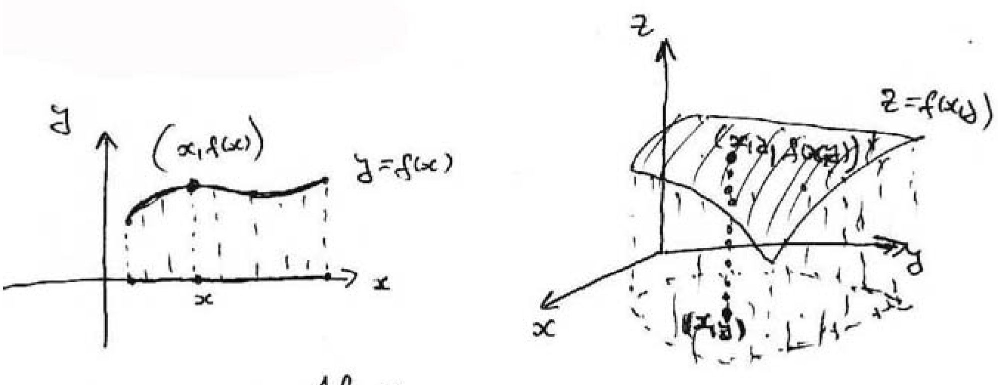
(ii) Tu treba biti $x^2+y^2\neq 0$, što je ravnina bez ishodišta (sl.5.). Naime $(0,0)$ je jedino rješenje jednadžbe $x^2+y^2=1$.



Sl. 5. Ravnina bez Ishodišta

Graf funkcije dviju varijabla.
Analogno tome kako je graf funkcije f jedne ravnine **krivulja** u ravnini s jednadžbom $y = f(x)$, tako je graf funkcije dviju varijabla **ploha** u prostoru (sl.6.) s jednadžbom

$$z = f(x, y)$$



Sl. 6.

Tu smo, prirodno, uzeli da su koordinate u prostoru redom x, y, z, i gornja jednadžba govori kako treća koordinata z, ovisi o prvim dvjema (x, y).
Uočite jednostavnu, ali vrlo važnu vezu izmedju grafa i područja definicije:
(i) kod funkcija jedne varijable projekcija grafa $y = f(x)$ na x-os je upravo domena funkcije f, i iznad svake točke domene postoji točno jedna točka grafa-krivulje (iznad točke na osi apscisa s koordinatom x, na grafu je točka $(x, f(x))$.
(ii) kod funkcija dviju varijabla projekcija grafa $z = f(x, y)$ na xy-ravninu je upravo domena funkcije f i iznad svake točke domene postoji točno jedna točka grafa-plohe (iznad točke xy-ravnine s koordinatama (x, y), na grafu je točka $(x, y, f(x, y))$.

Dalje bi bilo: graf funkcije f triju varijabla je **trodimenzionana ploha** u četverodimenzionalnom prostoru (tzv. **hiperploha**), s jednadžbom $w =$

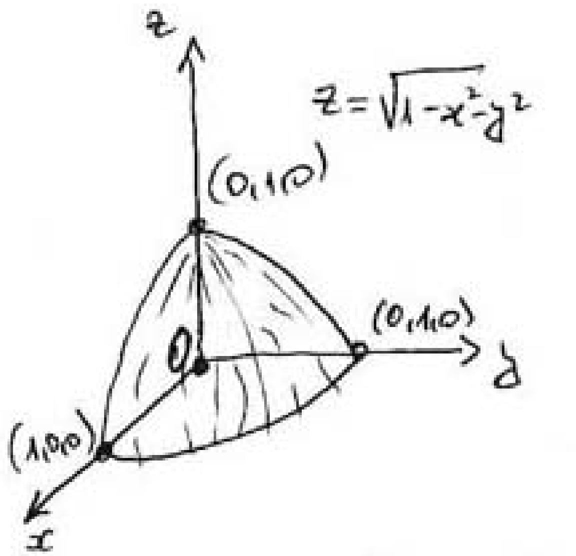
$f(x, y, z)$ itd. Graf funkcije triju ili više varijabla očito ne možemo grafički predočiti, a problemi nastaju i kod funkcija dviju varijabla. Ipak, razvijaju se metode za približno dočaravanje grafova takvih funkcija.

Primjer 3. - jednadžba kugline plohe.
Opišimo i predočimo graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Graf je ploha s jednadžbom $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, što je ekvivalentno sustavu: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ i $z \geq 0$, tj. sustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ i \ z \geq 0$$

Kako je $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta, to čitamo ovako: *točka (x, y, z) je na grafu ako i samo ako joj je udaljenost od ishodišta 1 i s gornje je strane xy-ravnine.*
Drugim riječima, graf je gornja polusfera polumjera 1 (sl.7.).

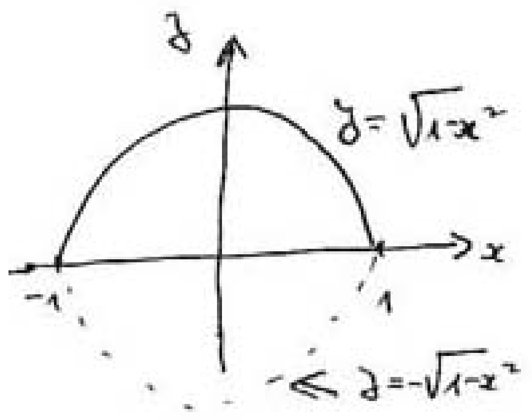


Sl.7. Dio sfere u
1. oktantu

Zato je (ako izbacimo uvjet $z \geq 0$)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

jednadžba sfere polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Uočite sličnost s time što je $x^2 + y^2 = 1$ jednadžba kružnice u xy-ravnini, a $y = \sqrt{1 - x^2}$ jednadžba gornje polukružnice (sl.8.).



Sl. 8. Gornja i donja polukružnica

Parcijalne derivacije funkcije dviju varijabla.

Prema analogiji s derivacijom funkcije f jedne varijable u točki x_0:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

što pišemo i kao

$$\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

definiramo parcijalne derivacije funkcije f dviju varijabla u točki (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(to je parcijalna derivacija po varijabli x; tu y_0 stoji, a x se mijenja oko x_0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

(to je parcijalna derivacija po varijabli y; tu x_0 stoji, a y se mijenja oko y_0). Vidimo da su parcijalne derivacije u točki dva broja. Poput funkcija jedne varijable, ako umjesto (x_0, y_0) stavimo (x, y) dobijemo parcijalne derivacije funkcije f; to su dvije nove funkcije, koje označavamo kao

$$\frac{\partial f}{\partial x} \; \textit{odnosno} \; \frac{\partial f}{\partial y}$$

One se lako računaju, na primjer da bismo dobili $\frac{\partial f}{\partial x}$, u izrazu za f, varijablu y smatramo konstantom, a varijablu x promjenjivom. To pokazujemo na primjeru.

Primjer 4. Neka je $f(x,y) = x^2y+xy^2$. Odredimo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$.

Tu je
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$, i $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cdot 2y = x^2 + 2xy$.
Zato je: $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 21$, i $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16$.
Tu se jasno vidi da su parcijalne derivacije funkcije, a parcijalne derivacije u točki brojevi.

Primjer 5. - parcijalne derivacije funkcije triju varijabla.
Odredimo parcijalne derivacije funkcije $f(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

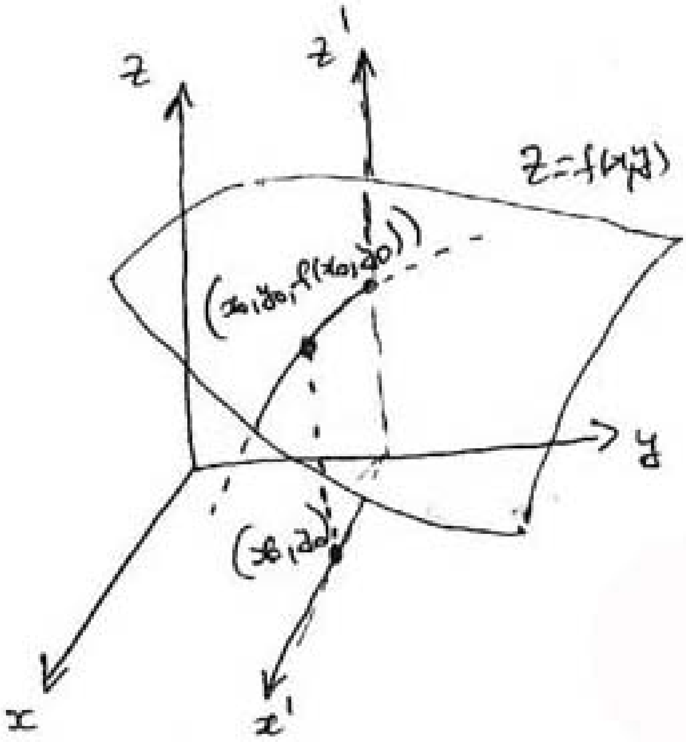
Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
Sad, koristeći se simetrijom, bez računanja dobijemo:
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, i $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Fizikalno značenje parcijalnih derivacija.
Poput činjenice da derivacija funkcije jedne varijable opisuje brzinu promjene jedne varijable s obzirom na promjenu druge; za funkciju f dviju varijabla x, y, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}$ opisuje brzinu promjene varijable z (gdje je $z = f(x,y)$), s obzirom na promjenu varijable x (pri stalnoj vrijednosti varijable y). Slično je s $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Primjer 6. Komentirajmo brzinu promjene veličine z iz Primjera 4. u točki $(2,3)$.

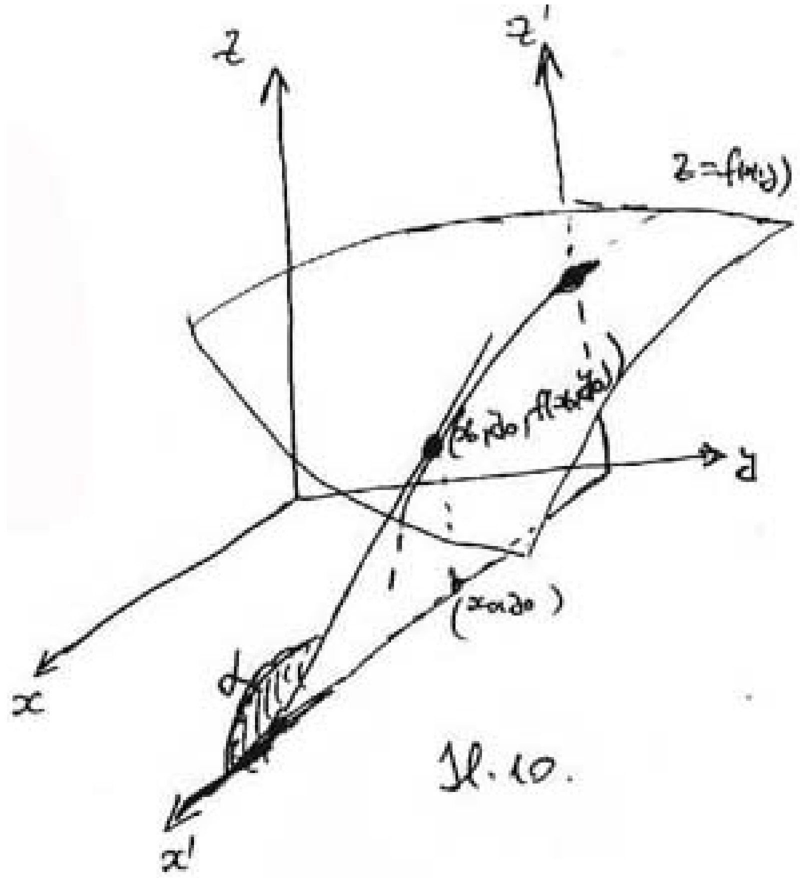
Tu je $z = f(x,y) = x^2y + xy^2$, pa je $z(2,3) = 30$. Takodjer je $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 21$, i $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16$. Odatle očitavamo da se da je brzina promjene u x smjeru 21, a u y smjeru 16 (manja brzina).
To možemo tumaciti ovako:
za malu promjenu vrijednosti h veličine x (od 2 do $2+h$), dok y zadržava stalnu vrijednost 3, z će se približno promijeniti za $21h$, a za malu promjenu h vrijednosti veličine y (od 3 do $3+h$), dok x zadržava stalnu vrijednost 2, z će se približno promijeniti za $16h$.

Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija.
Da opišemo geometrijsko značenje parcijalne derivacije po x u (x_0, y_0), presijecimo graf funkcije f ravninom s jednadžbom $y = y_0$, koja je usporedna s xz-ravninom (sl.9.).



sl. 9.

Dobijemo krivulju u toj ravnini, (možemo je zvati $x'z'$-ravninom) kod koje se mijenjaju vrijednosti x i z prema formuli $z = f(x, y_0)$, koja prolazi točkom (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Poput činjenice da je derivacija funkcije jedne varijable u točki jednaka koeficijentu smjera (nagibu) tangente na graf te funkcije u toj točki; za funkciju f dviju varijabla x, y, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je nagib tangente na gornju krivulju u točki (x_0, y_0, z_0). Tu je nagib tangens kuta što ga tangenta čini s novom x-osi, tj. s x' osi (sl.10.).



Sl. 10.

Parcijalne derivacije višeg reda.

Prema uzoru na derivaciju drugog reda funkcije jedne varijable, definiraju se parcijalne derivacije drugog reda funkcije dviju varijabla (ili više varijabla). Sjetimo se oznaka za drugu derivaciju funkcije dviju varijabla:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Tu eksponent 2 ne znači kvadriranje već samo činjenicu da se deriviranje vrši dva puta i to po x. Slično je za funkcije dviju varijabla.
Načelno imamo četiri mogućnosti (i četiri oznake):
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - obje derivacije po x
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - obje derivacije po y
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ - prva derivacija po x, druga po y
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ - prva derivacija po y, druga po x.

Primjer 7. Neka je $f(x, y) = x^2 y + xy^2$. Odredimo parcijalne derivacije drugog reda.

Već smo vidjeli da je
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$, i
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$.
Zato je:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\delta x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\delta x}(2xy + y^2) = 2y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\delta y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\delta y}(x^2 + 2xy) = 2x$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\delta y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\delta y}(2xy + y^2) = 2x + 2y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\delta x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\delta x}(x^2 + 2xy) = 2x + 2y$.

Vidimo da je u Primjeru 7. bilo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

To vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru (istina, neki prirodni uvjeti moraju bili zadovoljeni). Ta činjenica poznata je kao Clairautov teorem, katkad se naziva i Schwartzov teorem.

Slično bi se definirale parcijalne derivacije trećeg ili višeg reda.

V. Pitanja i zadaci

1. Nadjite parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
2. Nadjite parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i funkcije $g := \frac{1}{f}$.